

## 1 – Дәріс

**Тақырыбы:** Алғашқы функция, анықталмаған интеграл, оның қасиеттері. Анықталмаған интеграл кестесі. Анықталмаған интегралды интегралдау әдістері.

**Анықтама.** Егер  $F(x)$  функциясы  $J$  аралығында дифференциалданса және

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in J$$

орындалса, онда  $F(x)$  функциясы  $f(x)$ -функциясының  $J$  аралығындағы алғашқы функциясы деп аталады.

(Бұдан әрі  $J = (a, b)$  деп аламыз. Басқа жағдайлар болса, атап көрсетеміз).

Егер  $F(x)$  функциясы  $f(x)$ -функциясының  $J$  аралығындағы алғашқы функциясы болса, онда кез келген  $C$  тұрақтысы үшін  $F(x) + C$  функциясы да  $f(x)$ -үшін  $J$ -да алғашқы функция болады:

$$\forall x \in J, \quad (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

**Анықтама.**  $f$  функциясының  $J$  аралығында анықталған барлық алғашқы функциялардың жиынтығы  $f$  функциясының  $J$  аралығындағы анықталмаған интегралы деп аталады және

$$\int f(x)dx$$

символымен белгіленеді:  $\int$  – интеграл белгісі, ал  $f(x)$ -интеграл астындағы функция,  $f(x)dx$ -интеграл астындағы өрнек деп аталады.

Егер  $F(x)$  функциясы  $f(x)$ -функциясының қандай да бір алғашқы функциясы болса, онда

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

деп жазу қалыптасқан.

Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттерін көрсетейік.

$$1^0. \int dF(x) = F(x) + C, \quad -\infty < C < \infty$$

$$2^0. d \int f(x)dx = f(x)dx.$$

$$3^0. \int A \cdot f(x)dx = A \int f(x)dx, \quad A - \text{тұрақты.}$$

$$4^0. \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

5<sup>0</sup>. Егер  $F(x)$  функциясы  $f(x)$  - функциясының алғашқы функциясы болса, онда  $\frac{1}{a} F(ax + b)$  функциясы  $f(ax + b)$ - функциясының алғашқы функциясы болады, яғни:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Дифференциалдау формуласынан шығатын интегралдар кестесін келтірейік.

$$1. \int 0 dx = C$$

$$2. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \neq -1.$$

$$3. \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Дербес жағдайы ( $a = e$ )

$$5. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$10. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C, \quad \text{мұнда } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$11. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C, \quad \text{мұнда } \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$12. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$13. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C.$$

## Интегралдау әдістері

### 1. Айнымалыны ауыстыру әдісі.

Интегралдық есептеулерде айнымалыны ауыстыру формуласы ерекше орын алады.

$f(x)$  функциясы  $[a, b]$  сегментінде үзіліссіз болып,  $F(x)$  оның алғашқы функциясы болсын, яғни

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (1)$$

Егер  $x = \varphi(t)$  функциясы  $[\alpha, \beta]$  сегментінде өзінің туындысымен бірге үзіліссіз болса және  $a \leq \varphi(t) \leq b$  теңсіздіктері орындалса, онда:

$$\frac{d}{dt} F[\varphi(t)] = f[\varphi(t)] \varphi'(t)$$

Анықталмаған интегралдың анықтамасы бойынша:

$$\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] + C \quad (2)$$

(1) және (2) бойынша  $x = \varphi(t)$  үшін:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt \quad (3)$$

**Бөліктеп интегралдау әдісі.**

Егер  $u(x)$  және  $v(x)$  функциялары үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болса, онда

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (4)$$

немесе

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx \quad (5)$$

(4) немесе (5) формулаларын қолданып есептеу **бөліктеп интегралдау әдісі** деп аталады.